UNIVERSITE D'ORLEANS

ECOLE SUPERIEURE DE L'ENERGIE ET DES MATERIAUX

EPREUVES D'ADMISSION 1985 Option C

MATHEMATIQUES

Durée 4 H Coefficient 4

Les différentes parties du problème sont dans une large mesure, indépendantes entre elles. Le soin apporté aux calculs à effectuer, ainsi que la rigueur du raisonnement seront des éléments très importants d'appréciation.

PREAMBULE

On pourra se permettre dans le problème d'appeler variable (ou selon l'usage v.a.r.) une variable aléatoire réelle. Toutes celles qui interviennent sont définies sur un espace probabilisé qu'on notera universellement $(\Omega,\mathcal{B},P)$. Enfin, on notera E(X) et V(X) l'espérance et la variance de la variable X si elles existent.

Si on dispose d'une suite de variables $(X_n)_{n\geqslant d}$ et d'une autre variable X définies sur l'espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{B},P)$, nous dirons que cette suite $(X_n)_{n\geqslant d}$ converge en loi vers X si, en notant F_n la fonction de répartition de X_n et F celle de X, en tout point $x \in \mathbb{R}$ en lequel F est continue, on a :

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x).$$

PREMIERE PARTIE :

Convergence des suites de v.a.r. entières

I.1. On tire au hasard un jeton d'une boîte contenant n jetons numérotés de 1 à n ($n \in \mathbb{N}^*$), et on considère la variable X_n égale au numéro du jeton tiré, si celui-ci porte le numéro n, et égale à 0 sinon.

a) Préciser la loi de X_n, son espérance et sa variance.

b) Montrer que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers la variable certaine nulle.

I.2. a) On suppose que les variables X_n ($n \geqslant d$) et X sont discrètes et à valeurs dans $\mathbb{N}$

Montrer que pour la suite $(X_n)_{n\geqslant d}$ converge en loi vers X, il faut et il suffit que l'on ait :

$$\forall\, k \in \mathbb{N} \qquad \lim_{n\to\infty} P(X_n = k) = P(X = k).$$

Pour cela, on pourra remarquer que si $k \in \mathbb{N}$,

$$\{X = k\} = \left\{k - \tfrac{1}{2} \leqslant X < k + \tfrac{1}{2}\right\}.$$

b) Si on suppose de plus que X_n et X possèdent une espérance, la suite $\left(E(X_n)\right)_{n\geqslant d}$ converge-t-elle vers E(X) ? On justifiera la réponse.

c) Citer, sans démonstration, un exemple notoire de convergence en loi d'une suite de variables à valeurs dans $\mathbb{N}$ vers une variable à valeur dans $\mathbb{N}$, et examiner le problème de la question 2.b) pour cette suite.

DEUXIEME PARTIE :

Un exemple de convergence

On considère une population de N individus, dont a sont blancs et $b = N-a$ sont noirs, avec : $n \in \mathbb{N}^*$, $a \in \mathbb{N}^*$, $b \in \mathbb{N}^*$ et on note $p = \frac{a}{N}$, $q = \frac{b}{N} = 1 - p$.

On prélève au hasard, successivement, mais sans remise les individus de cette population. Pour $r \in \mathbb{N}^*$, avec $1 \leqslant r \leqslant a$, on désigne par $X_{a,r}$ la variable aléatoire égale au rang du $r^{\text{ième}}$ individu blanc obtenu au cours de ces prélèvements.

II.1. Préciser la loi de $X_{a,r}$.

II.2. Vérifier la formule, pour $N \in \mathbb{N}^*$, $b \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{N}^*$, avec $b + r \leqslant N$:

$$\sum_{k=r}^{b+r} \frac{C_b^{k-r}}{k.C_N^k} = \frac{1}{r.\ C_{N-b}^r}$$

(On pourra justifier cette formule, soit de façon probabilistique, soit en raisonnant par récurrence sur b, soit de toute autre façon...).

II.3. Calculer $E(X_{a,r})$ et $V(X_{a,r})$ (on pourra pour cela chercher l'espérance de $Y = X_{a,r} - r$ et de $Y(Y-1)$).

II.4. Expliciter la loi de $X_r = X_{r,r}$ lorsque $b = a = r$, préciser son espérance et en donner un équivalent lorsque a tend vers $+\infty$; interpréter.

II.5. Pour p et $q = 1 - p$ fixés, $k \in \mathbb{N}$ et $r \in \mathbb{N}^*$ fixés, calculer

$$\lim_{a \to \infty} P(X_{a,r} = k)$$

et interpréter. (On pourra remarquer que si $1 \leqslant \beta \leqslant \alpha$:

$$C_\alpha^\beta = \frac{\alpha^\beta}{\beta!} \cdot \prod_{i=0}^{\beta-1} \left(1 - \frac{i}{\alpha}\right).$$

TROISIEME PARTIE :

Lois gamma et bêta

Pour $a > 0$ et $b > 0$, on note

$$\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} e^{-t}.t^{a-1}\,dt$$

et

$$\beta(a,b) = \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}.dt.$$

On ne demande pas de justifier l'existence de ces intégrales eulériennes, et de plus on admettra :

i) $\forall\, a > 0 \quad \Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$

ii) $\forall\, a > 0 \ \forall\, b > 0 \quad \beta(a,b) = \dfrac{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} = \beta(b,a)$

C'est-à-dire que l'on pourra utiliser ces formules dans le problème sans avoir à les rejustifier.

III.1. On considère une variable X suivant une loi gamma de paramètre α (avec $\alpha > 0$) qu'on notera γ_α ; c'est-à-dire que X admet comme densité :

$$f : t \longmapsto \begin{cases} 0 \text{ si } t \leqslant 0 \\ \dfrac{e^{-t}t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \text{ si } t > 0 \end{cases}$$

Pour $\lambda > 0$, $\alpha > 0$, on dira que Y suit une loi $\gamma_{\alpha,\lambda}$ si $\lambda.Y = X$ suit une loi γ_α.

a) Montrer qu'alors Y admet comme densité :

$$g : t \longmapsto \begin{cases} 0 \text{ si } t \leqslant 0 \\ \dfrac{\lambda^\alpha e^{-\lambda t} t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \text{ si } t > 0 \end{cases}$$

b) Que valent E(Y) et V(Y) ? (réponse brève souhaitée).

c) Si Y suit une loi $\gamma_{\alpha,\lambda}$ et Y' suit une loi $\gamma_{\alpha',\lambda}$, Y et Y' étant indépendantes, quelle est la loi de Y + Y' ?
(Réponse brève souhaitée).

d) Soit Z une variable normale centrée réduite, prouver que Z^2 suit une loi $\gamma_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$.

III.2.a) On dit qu'une variable X suit une loi bêta de paramètres a,b avec a > 0 et b > 0, qu'on notera $\beta_{a,b}$, si X admet comme densité :

$$h : t \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t \notin]0,1[\\ \dfrac{t^{a-1}(1-t)^{b-1}}{\beta(a,b)} & \text{si } t \in]0,1[. \end{cases}$$

Montrer que X admet une espérance et une variance que l'on calculera.

b) Soit X une variable de loi $\beta_{a,b}$ et Y de loi $\beta_{a+b,c}$ avec a > 0, b > 0, c > 0. Ces variables étant supposées indépendantes.

Déterminer l'espérance de U = X.Y.

III.3. Soit X une variable de loi γ_a et Y de loi γ_b avec a > 0, b > 0, X et Y étant supposées indépendantes. On pose S = X + Y et $Q = \frac{X}{X+Y}$.

Préciser la loi de S, la loi de Q et montrer que les variables S et Q sont indépendantes.

III.4.a) En admettant la formule de Stirling :

$$\Gamma(x) \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2\pi}{x}} \left(\frac{x}{e}\right)^x$$

Prouver que, pour a > 0 fixé on a : $\lim_{b \to +\infty} b^a . \beta(a,b) = \Gamma(a)$.

b) Soit X une variable de loi $\beta_{a,b}$ avec a > 0, b> 0 et soit $W_b = b.X$. Préciser la loi de W_b.

c) Soit $y \in \mathbb{R}_+^*$ et $b > y$. Montrer que :

$$\forall\, t \in [0,b] \qquad e^{-t}\left(1-\frac{t^2}{b}\right) \leqslant \left(1-\frac{t}{b}\right)^b \leqslant e^{-t}$$

puis,

$$\forall\, t \in [0,y] \qquad e^{-t}\left(1-\frac{y^2}{b}\right) \leqslant \left(1-\frac{t}{b}\right)^{b-1} \leqslant e^{-t}\,\frac{1}{(1-y/b)}.$$

Enfin, conclure soigneusement que :

$$\lim_{b \to +\infty} \int_0^y t^{a-1}.(1-\frac{t}{b})^{b-1}\,dt = \int_0^y t^{a-1}.e^{-t}.dt.$$

Que peut-on en conclure quant à la suite $(W_b)_{b \in \mathbb{N}^*}$?

QUATRIEME PARTIE:
Sur la fonction génératrice de Laplace

Soit X une variable aléatoire sur $(\Omega,\mathcal{B},P)$ de fonction de répartition F. On définit la fonction numérique G_X par : $G_X(x) = E(e^{-xX})$ si la variable e^{-xX} admet une espérance, c'est-à-dire que :

$$G_X(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-tx}\,dF(t) \text{ intégrale de Riemann-Stieltjes}$$

de la fonction $t \longmapsto e^{-tx}$ pour la mesure associée à F, où on se restreint aux deux cas suivants :

- si X est discrète, dans ce cas : $G_X(x) = \sum_{k \in X(\Omega)} e^{-xk}.P(X=k)$.
- Si X admet f comme densité, dans ce cas : $G_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-tx}.f(t)\,dt$.

En outre, on note $\mathcal{D}_X$ l'ensemble de définition de la fonction G_X.

IV.1. a) Si $Y = aX + b$ avec $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$, quel lien y-a-t-il entre G_Y et G_X ?

b) Prouver que $0 \in \mathcal{D}_X$ et préciser $G_X(0)$

c) Montrer que si $X(\Omega)$ est borné alors $\mathcal{D}_X = \mathbb{R}$

d) Montrer que si $X(\Omega)$ est minoré, alors $\mathbb{R}_+ \subset \mathcal{D}_X$

e) Montrer qu'en général, il existe α, β tels que $-\infty \leqslant \alpha \leqslant 0 \leqslant \beta \leqslant +\infty$ et tels que $\mathcal{D}_X$ soit un intervalle d'extrémités α et β.

IV.2. a) Montrer l'existence de $\rho(X) = \inf \{G_X(x) / x \in \mathcal{D}_X\}$ et prouver que : $0 \leqslant \rho(X) \leqslant 1$.

b) Prouver que pour $x \in \mathcal{D}_X$, $x > 0$ on a $P(X \leqslant 0) \leqslant G_X(x)$, et en déduire que si $\mathcal{D}_X \subset \mathbb{R}_+$, alors $\rho(X) \geqslant P(X \leqslant 0)$.

IV.3. Montrer que si X et Y sont deux variables indépendantes :

$$\forall x \in \mathcal{D}_X \cap \mathcal{D}_Y \qquad G_{X+Y}(x) = G_X(x)\ G_Y(x).$$

IV.4. Préciser G_X, $\mathcal{D}_X$ et $\rho(X)$ dans chacun des cas suivants (réponses brèves souhaitées).

a) X suit une loi binômiale $\mathcal{B}(n,p)$ avec $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in]0,1[$.

b) X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$: $\mathcal{P}(\lambda)$

c) X suit une loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$

d) X suit une loi $\gamma_{\alpha,\lambda}$ (voir III.1) (On pourra éventuellement calculer d'abord G_Y avec $Y = \lambda.X$).

IV.5. On rappelle qu'une fonction φ définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ est convexe si :

$$\forall (x,y) \in I^2 \qquad \forall t \in [0,1] \qquad \varphi(tx+(1-t)y) \leqslant t.\varphi(x) + (1-t)\varphi(y).$$

et que de plus, si φ est deux fois dérivable sur I, φ est convexe sur I si et seulement si $\varphi'' \geqslant 0$.

Montrer que G_X est convexe sur l'intervalle $\mathcal{D}_X$.

CINQUIEME PARTIE :

Convergence vers la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$

Dans toute cette partie, on considère une variable normale centrée réduite T.

V.1. a) Soit B_n une variable de loi binômiale $\mathcal{B}(n,p)$ avec $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in]0,1[$ et $q = 1 - p$

et soit $S_n = \dfrac{B_n - np}{\sqrt{npq}}$.

En utilisant IV.4.a) et IV.1.a), préciser G_{S_n} et prouver que pour $x \in \mathbb{R}$, on a $\lim\limits_{n \to \infty} G_{S_n}(x) = G_T(x)$.

b) Soit X_n une variable de loi de Poisson $\mathcal{P}(n\lambda)$ avec $n \in \mathbb{N}^*$, $\lambda > 0$, et soit $U_n = \dfrac{X_n - n\lambda}{\sqrt{n\lambda}}$.

En utilisant IV.4.b) et IV.1.a), préciser G_{U_n} et prouver que pour $x \in \mathbb{R}$, on a $\lim\limits_{n \to \infty} G_{U_n}(x) = G_T(x)$.

V.2. Soit $\lambda > 0$ fixé et X_α de loi $\gamma_{\alpha,\lambda}$ avec $\alpha > 0$ (définie en III.1). et soit : $M_\alpha = \dfrac{\lambda X_\alpha - \alpha}{\sqrt{\alpha}}$.

En utilisant IV.4d) et IV.1.a), préciser G_{M_α} et montrer que pour x convenable :

$$\lim_{\alpha \to \infty} G_{M_\alpha}(x) = G_T(x)$$

V.3. a) Soit $(X_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une suite de n variables normales, centrées réduites mutuellement indépendantes (pour $n \in \mathbb{N}^*$). Soit $\lambda \geqslant 0$, $Y_i = X_i + \sqrt{\dfrac{\lambda}{n}}$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$ et $Z_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i^2$.

Préciser $E(Z_n)$ et $V(Z_n)$.

b) Quels résultats retrouve-t-on lorsque $\lambda = 0$?

c) On considère que $\lambda = n\alpha$ avec $\alpha \geqslant 0$ et Z_n définie ci-dessus avec cette nouvelle valeur de λ. On pose :

$$J_n = \frac{Z_n - n(1+\alpha)}{\sqrt{2n(1+2\alpha)}} \qquad \text{pour } n \in \mathbb{N}^*.$$

Prouver que pour x convenable : $\lim\limits_{n \to \infty} G_{J_n}(x) = G_T(x)$.